Научная статья
УДК 517.535+519.177
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-94-112

СТРУКТУРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА МАТРИЦЫ ЛАПЛАСА ЦИРКУЛЯНТНОГО ГРАФА С НЕФИКСИРОВАННЫМИ СКАЧКАМИ

Александр Дмитриевич Медных[1]
Илья Александрович Медных[2]
Галина Константиновна Соколова[3]

[1,2,3]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия,

[1]smedn@mail.ru
[2]ilyamednykh@mail.ru
[3]98gal@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается класс циркулянтных графов с нефиксированными скачками, и описывается структура характеристического полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа таких графов. Характеристический полином представлен как произведение алгебраических функций, выраженных через корни линейной комбинации полиномов Чебышева первого рода. Показано, что $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ является произведением квадрата целочисленного полинома и явно заданных целочисленных множителей. В заключении приведена формула подсчета числа корневых остовных лесов в графе.

Ключевые слова и фразы

циркулянтный граф, корневой остовной лес, характеристический полином, матрица Лапласа.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева (проект FWNF-2022-0005)

Для цитирования

Медных А. Д., Медных И. А., Соколова Г. К. Структура характеристического полинома матрицы Лапласа циркулянтного графа с нефиксированными скачками //*Математические труды*, 2025, Т. 28, № 1, С. 94-112. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-94-112

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 94-112
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 94-112

THE STRUCTURE OF THE CHARACTERISTIC POLYNOMIAL OF LAPLACE MATRIX FOR CIRCULANT GRAPHS WITH NON-FIXED JUMPS

Alexander D. Mednykh[1], Ilya A. Mednykh[2], Galina K. Sokolova[3]

[1,2,3]Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia,

[1]smedn@mail.ru, [2]ilyamednykh@mail.ru, [3]98gal@mail.ru

Abstract

The main objects of the present paper are circulant graphs with non-fixed jumps. The paper describes the structure of characteristic polynomial $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ of Laplace matrix of such a graphs. It is shown that characteristic polynomial can be presented as a product of algebraic functions, each of them is expressed through the roots of linear combination of Chebyshrev polynomials of the first kind. Also, it is proved that $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ is always a square of an integer polynomial multiplied by some prescribed integer polynomial. As an example of application, the formula for the number of rooted spanning forests in such a graphs is given.

Keywords

circulant graph, rooted spanning forest, characteristic polynomial, Laplace matrix.

Funding

The work is done within framework of state contract of Sobolev institute of mathematics (project FWNF-2022-0005)

For citation

Mednykh A. D., Mednykh I. A., Sokolova G. K. The structure of the characteristic polynomial of Laplace matrix for circulant graphs with non-fixed jumps //*Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 1, P. 94-112. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-1-94-112

§ 1. Введение и постановка задачи

Одним из основных инвариантов конечного связного графа G является его *сложность*, определяемая числом остовных деревьев $\tau(G)$ данного графа. Отметим, что если граф не связен, то его сложность равна нулю. Для связного графа сложность выражается по теореме Кирхгофа [1] как произведение всех ненулевых собственных значений матрицы Лапласа заданного графа, поделенное на число его вершин. Также в заданном графе важным инвариантом является число корневых остовных лесов. Согласно результату работы [2], это значение можно найти с помощью определителя матрицы $\det(\mathscr{L}+\mathbb{E})$, где $\mathscr{L}$ — матрица Лапласа графа G, а $\mathbb{E}$ — единичная матрица соответствующего порядка.

Ранее были получены структурные теоремы, описывающие свойства числа остовных деревьев [3] и корневых остовных лесов [4] для семейства циркулянтных графов с фиксированными скачками. Данные величины зависят от собственных значений характеристического полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа рассматриваемого графа. Структура самого полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ для циркулянтного графа описана в статье [5]. Величина, равная $\chi_{\mathscr{L}}(-1) = \det(\mathscr{L} + \mathbb{E})$, является важным комбинаторным инвариантом, отвечающим за подсчет числа корневых остовных лесов в графах (более подробно об этом см. статьи [2, 4, 6]).

Данная статья посвящена описанию характеристического полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа циркулянтного графа на βn вершинах

$$G_n = C_{\beta n}(s_1, \ldots, s_k, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_\ell n),$$

с нефиксированными скачками, где

$$1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \left[\frac{\beta n}{2}\right], \quad \text{и} \quad 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell \le \left[\frac{\beta}{2}\right].$$

Всюду далее число n предполагается достаточно большим, а $s_1, s_2, \ldots, s_k$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ и $\beta > 1$ — фиксированные целые положительные числа. В статье также осуществляется подсчет числа корневых остовных лесов в таких графах. О подсчете числа остовных деревьев для циркулянтных графов см. статьи [7, 8, 9, 10, 11, 12].

§ 2. Предварительные сведения и результаты

Будем рассматривать *конечный связный граф* G, иначе говоря, граф с конечными множествами вершин $V(G)$ и ребер $E(G)$, содержащий одну компоненту связности. Предполагается, что граф G не содержит петель, но, возможно, допускает наличие кратных ребер. Данному графу поставим в соответствие *матрицу смежности* $A = \{a_{uv}\}_{u,v\in V(G)}$, где a_{uv} есть число ребер между вершинами u, $v \in V(G)$ графа G, и *матрицу валентности* вершин $D = \{d_{vv}\}_{v\in V(G)}$, где d_{vv} есть степень вершины $v \in V(G)$, которую можно определить по формуле $d_{vv} = \sum\limits_{u\in V(G)} a_{uv}$. Тогда матрица разности $\mathscr{L} = D - A$ называется *матрицей Лапласа* или *лапласианом* графа G, а соответствующий ей *характеристический полином* $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ определяется через определитель $\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \det(\mathscr{L} - \mu\mathbb{E})$, где $\mathbb{E}$ — единичная матрица порядка, равного числу вершин графа G.

Определение 1. Граф $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ на n вершинах называется *циркулянтным* графом, если существуют целые положительные числа $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leq \frac{n}{2}$ такие, что любая i-я вершина смежна с вершинами $i\pm s_1, i\pm s_2, \ldots, i\pm s_k$ по модулю n. Величины s_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, называются *скачками* графа.

Граф G является связным тогда и только тогда, когда выполняется условие $\gcd(s_1, s_2, \ldots, s_k, n) = 1$. Также с каждым циркулянтным графом G ассоциируется полином Лорана вида

$$L(z) = 2k - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

В данной статье будем рассматривать класс *циркулянтных графов с нефиксированными скачками*. Введем определение таких графов.

Определение 2. $G_n = C_{\beta n}(s_1, \ldots, s_k, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_\ell n)$ на βn вершинах называется *циркулянтным графом с нефиксированными скачками* $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k < \left[\frac{\beta n}{2}\right]$, и $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell \leq \left[\frac{\beta}{2}\right]$, если любая i-я вершина смежна с вершинами $i\pm s_1, i\pm s_2, \ldots, i\pm s_k$ и $i\pm\alpha_1 n, i\pm\alpha_2 n, \ldots, i\pm\alpha_\ell n$ по модулю βn. Здесь β и ℓ — целые положительные числа, а n предполагается достаточно большим.

Заметим, что если $\alpha_\ell < \left[\frac{\beta}{2}\right]$, то граф G_n не содержит кратных ребер. Если $\alpha_\ell = \left[\frac{\beta}{2}\right]$, то любая i-я вершина соединяется с вершиной $i \pm \frac{\beta n}{2}$ по модулю βn двумя параллельными ребрами.

Примером циркулянтного графа G_n с нефиксированными скачками служит граф на $2n$ вершинах $C_{2n}(1, n)$, называемый лестницей Мёбиуса с двойными ступенями.

Замечание 1. В статьях [13, 14, 15], посвященных циркулянтным графам с нечетной степенью вершин, символом $C_{2n}(1,n)$ обозначается лестница Мёбиуса с одинарными ступенями. Степень вершин этого графа нечетна и равна 3.

Как и для графа $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, каждому циркулянтному графу с нефиксированными скачками $G_n = C_{\beta n}(s_1, \dots, s_k, \alpha_1 n, \dots, \alpha_\ell n)$ ставится в соответствие полином Лорана вида

$$L(z) = 2(k+\ell) - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(z^{\alpha_m n} + z^{-\alpha_m n}),$$

описывающий структуру матрицы Лапласа заданного графа. Отметим, что нумерацию вершин циркулянтного графа G_n можно выбрать таким образом, чтобы матрица смежности A и матрица Лапласа $\mathscr{L}$ данного графа были циркулянтными. Напомним, что матрицу порядка n называют *циркулянтной*, если она имеет вид

$$\operatorname{circ}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда лапласиан графа G_n можно определить как матрицу вида

$$\mathscr{L} = L(T) = 2(k+\ell)\mathbb{E} - \sum_{i=1}^{k}(T^{s_i} + T^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(T^{\alpha_m n} + T^{-\alpha_m n}),$$

где $T = \operatorname{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$ является циркулянтной матрицей порядка βn, которая представляет циклический оператор сдвига

$$T : (x_1, x_2, \dots, x_{\beta n - 1}, x_{\beta n}) \to (x_2, x_3, \dots, x_{\beta n}, x_1).$$

Рассмотрим полином Лорана $L(z)$ графа G_n. Представим его в виде суммы $L(z) = P(z) + p(z^n)$ двух полиномов

$$P(z) = 2k - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}) \quad \text{и} \quad p(z) = 2\ell - \sum_{m=1}^{\ell}(z^{\alpha_m} + z^{-\alpha_m}). \tag{1}$$

и введем следующие полиномы

$$P_u(z) = P(z) + p(e^{i\frac{2\pi u}{\beta}}), \quad u = 0, 1, \dots, \beta - 1. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{T}_n(w) = \cos n\theta$, где $\theta = \arccos w$, полином Чебышева первого рода [16, Chapter 1]. Поскольку для полинома $\mathcal{T}_n(w)$ верно равенство $\mathcal{T}_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n+z^{-n}}{2}$, полином $P(z)$ запишется в виде

$$P(z) = Q(w) = 2k - 2\sum_{i=1}^{k} \mathcal{T}_{s_i}(w),$$

где $w = \frac{z+z^{-1}}{2}$. Также так как полином $p(z)$ в точке $z = e^{i\frac{2\pi u}{\beta}}$ имеет вид

$$p(e^{i\frac{2\pi u}{\beta}}) = 4\sum_{m=1}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right),$$

то для полиномов (2) будет иметь место представление

$$P_u(z) = Q_u(w) = 2k - 2\sum_{i=1}^{k} \mathcal{T}_{s_i}(w) + 4\sum_{m=1}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right).$$

Корни полиномов $P_u(z)$ и $Q_u(z)$ связаны следующим фактом.

Замечание 2. Если величины $z_k, \frac{1}{z_k}$, при $k = 1, 2, \ldots s$, являются корнями полинома $P_u(z)$, то числа $w_k = \frac{z_k+z_k^{-1}}{2}$ — корни полинома $Q_u(w)$.

В заключении данного параграфа рассмотрим техническую лемму, ранее приведенную в статье [12] и необходимую для доказательства основного результата статьи.

Лемма 1. *Для вещественного числа ω и полинома вида*

$$H_u(z) = \prod_{s=1}^{m} (z - z_s(u))(z - z_s^{-1}(u)),$$

выполняется соотношение

$$\prod_{t=0}^{n-1} H_u(e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}}) = (-e^{i\omega})^m \prod_{s=1}^{m} (2\mathcal{T}_n(\omega_s(u)) - 2\cos\omega),$$

где $\omega_s(u) = \frac{1}{2}(z_s(u) + z_s^{-1}(u))$, и $\mathcal{T}_n(\omega)$ — полином Чебышева первого рода.

Доказательство. Рассмотрим полином $H_u(z)$ при $z = e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}}$. Имеет место следующая цепочка равенств

$$\prod_{t=0}^{n-1} H_u(e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}}) = \prod_{t=0}^{n-1}\prod_{s=1}^{m} (e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}} - z_s(u))(e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}} - z_s^{-1}(u)) =$$

$$= \prod_{t=0}^{n-1}\prod_{s=1}^{m}(-e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}}z_s^{-1}(u))(z_s(u)-e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}})(z_s(u)-e^{-i\frac{2\pi t+\omega}{n}}) =$$

$$= \prod_{s=1}^{m}(-e^{i\omega}z_s^{-n}(u))\prod_{t=0}^{n-1}(z_s(u)-e^{i\frac{2\pi t+\omega}{n}})(z_s(u)-e^{-i\frac{2\pi t+\omega}{n}}) =$$

$$= \prod_{s=1}^{m}(-e^{i\omega}z_s^{-n}(u))(z_s^{2n}(u)-2z_s^n(u)\cos\omega+1) =$$

$$= (-e^{i\omega})^m\prod_{s=1}^{m}(z_s^n(u)+z_s^{-n}(u)-2\cos\omega) = (-e^{i\omega})^m\prod_{s=1}^{m}(2\mathcal{T}_n(\omega_s(u))-2\cos\omega).$$

В последнем равенстве используется соотношение $\mathcal{T}_n(\frac{z+z^{-1}}{2}) = \frac{z^n+z^{-n}}{2}$ для полинома Чебышева первого рода. □

§ 3. Характеристический полином матрицы Лапласа циркулянтного графа с нефиксированными скачками

В настоящем параграфе приводится структура характеристического полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа циркулянтного графа G_n с нефиксированными скачками. А именно, в основной теореме 1 характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ раскладывается в конечное произведение алгебраических функций, вычисленных в корнях линейной комбинации полиномов Чебышева первого рода. Сформулируем соответствующую теорему и приведем ее доказательство.

Теорема 1. *Характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа $\mathscr{L}$ циркулянтного графа*

$$G_n = C_{\beta n}(s_1,\ldots,s_k,\alpha_1 n,\ldots,\alpha_\ell n),$$
$$1 \le s_1 < \ldots < s_k < \left[\frac{\beta n}{2}\right],\;\; 1\le \alpha_1<\ldots<\alpha_\ell \le \left[\frac{\beta}{2}\right],$$

с нефиксированными скачками задается формулой

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = (-1)^{n(\beta-1)}\prod_{u=0}^{\beta-1}\prod_{j=1}^{s_k}\left(2\mathcal{T}_n(w_j(u))-2\cos\left(\frac{2\pi u}{\beta}\right)\right),$$

где $\mathcal{T}_s(w)$ — полином Чебышева первого рода, и числа $w_j(u)$ есть корни следующего уравнения

$$\sum_{i=1}^{k}\mathcal{T}_{s_i}(w) = k-\frac{\mu}{2}+2\sum_{m=1}^{\ell}\sin^2\left(\frac{\pi u\alpha_m}{\beta}\right),$$

для каждого $u = 0, 1, \ldots, \beta - 1$.

Доказательство. Графу G_n поставим в соответствие полином Лорана $L(z)$ вида

$$L(z) = 2(k+\ell) - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(z^{\alpha_m n} + z^{-\alpha_m n}).$$

Тогда лапласиан графа G_n определяется как следующая матрица

$$\mathscr{L} = L(T) = 2(k+\ell)\mathbb{E} - \sum_{i=1}^{k}(T^{s_i} + T^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(T^{\alpha_m n} + T^{-\alpha_m n}),$$

где $T = \mathrm{circ}(0, 1, 0, \ldots, 0)$ является циркулянтной матрицей порядка βn. Отметим, что характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы $\mathscr{L}$ равен определителю матрицы $\mathscr{L} - \mu\mathbb{E}$, т.е.

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \det(\mathscr{L} - \mu\mathbb{E}).$$

Для исследования структуры полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ определим сначала спектр матрицы $\mathscr{L} - \mu\mathbb{E}$. Пусть λ — собственное значение, а v — собственный вектор данной матрицы. Тогда, как известно, $\det(\mathscr{L} - \mu\mathbb{E} - \lambda\mathbb{E}) = 0$, и имеет место система линейных уравнений

$$\left[(2(k+\ell) - \mu - \lambda)\mathbb{E} - \sum_{i=1}^{k}(T^{s_i} + T^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(T^{\alpha_m n} + T^{-\alpha_m n})\right] v = 0. \quad (3)$$

Заметим [17], что собственными значениями циркулянтной матрицы T являются степени первообразного корня единицы $\zeta_{\beta n}^{j}$, $j = 0, 1, \ldots, \beta n - 1$, где $\zeta_\ell = e^{\frac{2\pi i}{\ell}}$, и T подобна матрице $\mathbb{T} = \mathrm{diag}(1, \zeta_{\beta n}, \ldots, \zeta_{\beta n}^{\beta n - 1})$. Из этого следует, что матрица системы (3) может быть записана в диагональной форме, а собственными векторами матрицы $\mathscr{L} - \mu\mathbb{E}$ являются единичные векторы $\mathrm{e}_{j+1} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j+1-\text{й}}, 0, \ldots, 0)$ длины βn. Таким образом, для каждого $j = 0, 1, \ldots, \beta n - 1$ выполняется равенство

$$\left[(2(k+\ell) - \mu - \lambda)\mathbb{E} - \sum_{i=1}^{k}(\mathbb{T}^{s_i} + \mathbb{T}^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(\mathbb{T}^{\alpha_m n} + \mathbb{T}^{-\alpha_m n})\right] \mathrm{e}_j = 0.$$

Из последнего соотношения вытекает, что собственные значения λ_j матрицы $\mathscr{L} - \mu\mathbb{E}$ удовлетворяют соотношению

$$2(k+\ell) - \mu - \lambda_j - \sum_{i=1}^{k}(\zeta_{\beta n}^{j s_i} + \zeta_{\beta n}^{-j s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(\zeta_{\beta n}^{j\alpha_m n} + \zeta_{\beta n}^{-j\alpha_m n}) = 0.$$

Иначе говоря,

$$\lambda_j = 2(k+\ell) - \mu - \sum_{i=1}^{k}(\zeta_{\beta n}^{js_i} + \zeta_{\beta n}^{-js_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(\zeta_{\beta n}^{j\alpha_m n} + \zeta_{\beta n}^{-j\alpha_m n}) = L(\zeta_{\beta n}^{j}) - \mu.$$

Напомним, что рассматриваемый граф G_n предполагается связным; это значит, что $\lambda_0 = -\mu$ и $\lambda_j > -\mu$ при $j = 1, 2, \ldots, \beta n - 1$. Поскольку $\lambda_0 + \mu$ является собственным значением графа G_n, характеристический полином лапласиана графа G_n записывается в виде произведения

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \prod_{j=0}^{\beta n-1}(L(\zeta_{\beta n}^{j}) - \mu). \tag{4}$$

Преобразуем вид полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$. Пусть $j = \beta t + u$, тогда $0 \leq t \leq n-1$ и $0 \leq u \leq \beta - 1$, а полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ запишется в виде

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \prod_{t=0}^{n-1}(L(\zeta_{\beta n}^{\beta t}) - \mu)\prod_{u=1}^{\beta-1}\prod_{t=0}^{n-1}(L(\zeta_{\beta n}^{\beta t+u}) - \mu),$$

т.е. полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ распадется в произведение двух множителей

$$\chi_{\mathscr{L}}^{1}(\mu) = \prod_{t=0}^{n-1}(L(\zeta_{\beta n}^{\beta t}) - \mu), \quad \chi_{\mathscr{L}}^{2}(\mu) = \prod_{u=1}^{\beta-1}\prod_{t=0}^{n-1}(L(\zeta_{\beta n}^{\beta t+u}) - \mu).$$

Рассмотрим первый полином $\chi_{\mathscr{L}}^{1}(\mu)$, соответствующий значению $u = 0$. Заметим, что так как $\zeta_{\beta n}^{\beta t} = \zeta_n^t$ и полином Лорана $L(z)$ раскладывается в сумму полиномов (1), то верно равенство $L(\zeta_{\beta n}^{\beta t}) = P(\zeta_n^t)$. Величины $\lambda_t = P(\zeta_n^t) - \mu$ представляют собой все элементарные множители характеристического полинома лапласиана циркулянтного графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ с фиксированными скачками $s_1, s_2, \ldots, s_k$ на n вершинах. Согласно результату работы [2, Теорема 1], характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}^{1}(\mu)$ лапласиана графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ имеет вид

$$\chi_{\mathscr{L}}^{1}(\mu) = \prod_{\ell=0}^{s_k}(2\mathcal{T}_n(w_\ell) - 2), \tag{5}$$

где $\mathcal{T}_s(w)$ — полином Чебышева первого рода, и числа w_ℓ являются корнями уравнения

$$2\sum_{i=1}^{k}\mathcal{T}_{s_i}(w) = 2k - \mu. \tag{6}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 94-112
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 94-112

Рассмотрим второй полином $\chi^2_{\mathscr{L}}(\mu)$, соответствующий случаю $u > 0$. Так как полином Лорана $L(z)$ раскладывается в сумму полиномов (1) и имеет место равенство $(\zeta_{\beta n}^{\beta t+u})^n = \zeta_\beta^u$, то для каждого элементарного множителя в полиноме $\chi^2_{\mathscr{L}}(\mu)$ имеет место представление

$$L(\zeta_{\beta n}^{\beta t+u}) - \mu = P(\zeta_{\beta n}^{\beta t+u}) + p((\zeta_{\beta n}^{\beta t+u})^n) - \mu = P(\zeta_{\beta n}^{\beta t+u}) + p(\zeta_\beta^u) - \mu.$$

В последнем равенстве введем обозначение $P_u(z) = P(z) + p(\zeta_\beta^u)$. Заметим, что полином $P_u(z) - \mu$ является полиндромичным, т.е. удовлетворяет соотношению $P_u(z) - \mu = P_u(z^{-1}) - \mu$. Тогда этот полином представим в следующем виде

$$P_u(z) - \mu = -\prod_{\ell=1}^{s_k}(z - z_\ell(u))(z - z_\ell^{-1}(u)),$$

где $w_\ell(u) = \frac{1}{2}(z_\ell(u) + z_\ell^{-1}(u))$ есть корни уравнения

$$\sum_{i=1}^{k}\mathcal{T}_{s_i}(w) = k - \frac{\mu}{2} + 2\sum_{m=1}^{\ell}\sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right). \tag{7}$$

Применяя к полиному $P_u(z) - \mu$ утверждение леммы 1, получим следующее соотношение

$$\prod_{t=0}^{n-1}(P_u(e^{i\frac{2\pi t + \frac{2\pi t}{\beta}}{n}}) - \mu) = (-1)^n(-e^{i\frac{2\pi u}{\beta}})^{s_k}\prod_{j=1}^{s_k}(2\mathcal{T}_n(w_j(u)) - 2\cos\frac{2\pi u}{\beta}).$$

Следовательно, для полинома $\chi^2_{\mathscr{L}}(\mu)$ имеет место цепочка равенств

$$\chi^2_{\mathscr{L}}(\mu) = \prod_{u=1}^{\beta-1}\prod_{t=0}^{n-1}(L(\zeta_{\beta n}^{\beta t+u}) - \mu) = \prod_{u=1}^{\beta-1}\prod_{t=0}^{n-1}(P_u(e^{i\frac{2\pi t + \frac{2\pi t}{\beta}}{n}}) - \mu) =$$

$$= \prod_{u=1}^{\beta-1}(-1)^n(-e^{i\frac{2\pi u}{\beta}})^{s_k}\prod_{j=1}^{s_k}(2\mathcal{T}_n(w_j(u)) - 2\cos\frac{2\pi u}{\beta}) =$$

$$= (-1)^{(n+s_k)(\beta-1)}\prod_{u=1}^{\beta-1}(e^{i\frac{2\pi u}{\beta}})^{s_k}\prod_{j=1}^{s_k}(2\mathcal{T}_n(w_j(u)) - 2\cos\frac{2\pi u}{\beta}).$$

Поскольку β и s_k — целые положительные числа, верно равенство

$$\prod_{u=1}^{\beta-1}(e^{i\frac{2\pi u}{\beta}})^{s_k} = e^{i(\beta-1)\pi s_k} = (-1)^{(\beta-1)s_k}.$$

Таким образом, характеристический полином $\chi^2_{\mathscr{L}}(\mu)$ имеет вид

$$\chi^2_{\mathscr{L}}(\mu) = (-1)^{n(\beta-1)} \prod_{u=1}^{\beta-1} \prod_{j=1}^{s_k} (2\mathcal{T}_n(w_j(u)) - 2\cos\frac{2\pi u}{\beta}). \tag{8}$$

Из формул (5), (6) и (8), (7) следует требуемый результат. □

Следствие 1. *Характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа $\mathscr{L}$ циркулянтного графа*

$$C_{\beta n}(1, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_\ell n), \quad 1 \le \alpha_1 < \ldots, \alpha_\ell \le \left[\frac{\beta}{2}\right],$$

с точностью до знака задается формулой

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \prod_{u=0}^{\beta-1} \left(2\mathcal{T}_n \left(1 - \frac{\mu}{2} + 2\sum_{m=1}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right)\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi u}{\beta}\right)\right),$$

где $\mathcal{T}_n(w)$ — полином Чебышева первого рода.

Доказательство. В данном случае $k = 1$ и $s_1 = 1$. Вид характеристического уравнения $\chi_{\mathscr{L}}$ следует из теоремы 5, где $j = 1$, а $w_1(u)$ является корнем уравнения

$$\mathcal{T}_1(w_1(u)) = 1 - \frac{\mu}{2} + 2\sum_{m=1}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right).$$

Поскольку $\mathcal{T}_1(w) = w$, получаем требуемое утверждение. □

Следствие 2. *Характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа $\mathscr{L}$ циркулянтного графа*

$$C_{\beta n}(1, 2, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_\ell n), \quad 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell \le \left[\frac{\beta}{2}\right],$$

задается формулой

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = (-1)^{n(\beta-1)} \prod_{u=0}^{\beta-1} \prod_{j=1}^{s_k} \left(2\mathcal{T}_n(w_j(u)) - 2\cos\left(\frac{2\pi u}{\beta}\right)\right),$$

где $\mathcal{T}_n(w)$ — полином Чебышева первого рода, и числа

$$w_{1,2}(u) = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{25 + 4\mu + 16\sum_{m=1}^{\ell}\sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right)}\right),$$

для каждого $u = 0, 1, \ldots, \beta - 1$.

Доказательство. Здесь $k = 2$, $s_1 = 1$ и $s_2 = 2$. Вид характеристического уравнения $\chi_{\mathcal{L}}$ следует из теоремы 5, где $j = 2$, а $w_1(u)$ и $w_2(u)$ являются корнями уравнения

$$\mathcal{T}_1(w(u)) + \mathcal{T}_2(w(u)) = 2 - \frac{\mu}{2} + 2\sum_{m=1}^{\ell}\sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right).$$

И поскольку, по определению, $\mathcal{T}_1(w(u)) = w(u)$ и $\mathcal{T}_2(w(u)) = 2w^2(u) - 1$, получим квадратное уравнение

$$2w^2(u) + w(u) - 1 = 2 - \frac{\mu}{2} + 2\sum_{m=1}^{\ell}\sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right),$$

корнями которого являются величины $w_{1,2}(u)$, указанные в утверждении следствия. □

§ 4. Выделение целого квадрата в характеристическом полиноме

В данном параграфе исследуются алгебраические свойства характеристического полинома $\chi(\mu)$ матрицы Лапласа циркулянтного графа G_n. В теореме 2 показано, что характеристический полином циркулянтного графа всегда является полным квадратом некоторого целочисленного полинома с точностью до явно заданных линейных множителей.

Теорема 2. *Пусть $\chi_{\mathcal{L}}(\mu)$ является характеристическим полиномом матрицы Лапласа $\mathcal{L}$ циркулянтного графа*

$$G_n = C_{\beta n}(s_1, \ldots, s_k, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_\ell n),$$

$$1 \le s_1 < \ldots < s_k < \left[\frac{\beta n}{2}\right], \quad 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell \le \left[\frac{\beta}{2}\right].$$

Пусть числа p и q равны количеству четных элементов в последовательностях $s_1, s_2, \ldots, s_k$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$, соответственно. Тогда существует целочисленная последовательность $d_n(\mu)$ такая, что

1. *$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \mu(\mu - 4p)(d_n(\mu))^2$, если n четно;*

2. *$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \mu(\mu - 4(p+q))(d_n(\mu))^2$, если n нечетно, β четно;*

3. *$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = -\mu(d_n(\mu))^2$, если n нечетно, β нечетно.*

Доказательство. Отметим, что величины p и q можно определить по формулам $p = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}(1-(-1)^{s_i})$ и $q = \frac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{\ell}(1-(-1)^{\alpha_m})$. Как отмечалось в доказательстве теоремы 1, характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ равен определителю матрицы $\mathscr{L} - \mu\mathbb{E}$ и записывается в виде (4), иначе говоря,

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \prod_{j=0}^{\beta n-1}(\widetilde{\lambda}_j - \mu),$$

где $\widetilde{\lambda}_j = L(\zeta_{\beta n}^j)$, здесь $\zeta_{\beta n} = e^{\frac{2\pi i}{\beta n}}$ и

$$L(z) = 2(k+\ell) - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}(z^{\alpha_m n} + z^{-\alpha_m n}).$$

Заметим, что выполняется соотношение

$$\widetilde{\lambda}_{\beta n-j} = L(\zeta_{\beta n}^{\beta n-j}) = L(\zeta_{\beta n}^{j}) = \widetilde{\lambda}_j.$$

Тогда характеристический полином при нечетном значении βn имеет вид

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \prod_{j=0}^{\beta n-1}(\widetilde{\lambda}_j - \mu) = -\mu\prod_{j=1}^{\beta n-1}(\widetilde{\lambda}_j - \mu) = -\mu\prod_{j=1}^{\frac{\beta n-1}{2}}(\widetilde{\lambda}_j - \mu)^2,$$

а при четном значении βn преобразуется к виду

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \prod_{j=0}^{\beta n-1}(\widetilde{\lambda}_j - \mu) = -\mu(\lambda_{\frac{\beta n}{2}} - \mu)\prod_{j=1}^{\frac{\beta n}{2}-1}(\widetilde{\lambda}_j - \mu)^2.$$

Заметим, что каждое алгебраическое число λ_j содержится в приведенных выше произведениях вместе со всеми его сопряженными по Галуа элементами [18]. Поэтому, по теореме Виета, указанные произведения являются целочисленными полиномами. Найдем значение числа $\lambda_{\frac{\beta n}{2}}$, где βn — четное число. Пусть сначала число n четное, тогда

$$\lambda_{\frac{\beta n}{2}} = L(-1) = 2(k+\ell) - \sum_{i=1}^{k}((-1)^{s_i} + (-1)^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}((-1)^{\alpha_m n} + (-1)^{-\alpha_m n}) =$$

$$= 2k - \sum_{i=1}^{k}((-1)^{s_i} + (-1)^{-s_i}) = 2\sum_{i=1}^{k}(1 - (-1)^{s_i}) = 4p.$$

Предположим теперь, что n нечетно и β четно. Имеет место равенство

$$\lambda_{\frac{\beta n}{2}} = L(-1) = 2(k+\ell) - \sum_{i=1}^{k}((-1)^{s_i} + (-1)^{-s_i}) - \sum_{m=1}^{\ell}((-1)^{\alpha_m n} + (-1)^{-\alpha_m n}) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{k}(1 - (-1)^{s_i}) + 2\sum_{m=1}^{\ell}(1 - (-1)^{\alpha_m}) = 4p + 4q.$$

Таким образом, характеристический полином $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа $\mathscr{L}$ имеет следующий вид

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \mu(\mu - 4p) \prod_{j=1}^{\frac{\beta n}{2}-1} (\widetilde{\lambda}_j - \mu)^2,$$

если n четно, и

$$\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \mu(\mu - 4(p+q)) \prod_{j=1}^{\frac{\beta n}{2}-1} (\widetilde{\lambda}_j - \mu)^2,$$

если n нечетно и β четно. Полагая $d_n(\mu) = \prod\limits_{j=1}^{\frac{\beta n-1}{2}} (\widetilde{\lambda}_j - \mu)^2$ при нечетном n, и $d_n(\mu) = \prod\limits_{j=1}^{\frac{\beta n}{2}-1} (\widetilde{\lambda}_j - \mu)^2$ при четном n получим требуемый результат. □

§ 5. Подсчет числа остовных лесов в циркулянтном графе с нефиксированными скачками

Целью данного параграфа является нахождение формулы для подсчета числа корневых остовных лесов циркулянтного графа с нефиксированными скачками в терминах полиномов Чебышева первого рода.

Как отмечалось во введении, число корневых остовных лесов f_G в некотором графе G можно найти с помощью определителя матрицы $\mathscr{L}+\mathbb{E}$, где $\mathscr{L}$ — лапласиан графа G. Заметим, что данную величину можно определить с помощью характеристического полинома матрицы Лапласа, который по определению $\chi_{\mathscr{L}}(\mu) = \det(\mathscr{L} - \mu\mathbb{E})$, т.е. число корневых остовных лесов равно величине $\chi_{\mathscr{L}}(-1)$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 94-112
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 94-112

Используя структуру характеристического полинома $\chi_{\mathscr{L}}(\mu)$ матрицы Лапласа циркулянтного графа с нефиксированными скачками G_n, приведенную в теореме 1, получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Число корневых остовных лесов в циркулянтном графе*

$$G_n = C_{\beta n}(s_1, \ldots, s_k, \alpha_1 n, \ldots, \alpha_\ell n),$$

$$1 \le s_1 < \ldots < s_k < \left[\frac{\beta n}{2}\right], \quad 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell \le \left[\frac{\beta}{2}\right],$$

задается формулой

$$f_G(\beta n) = \prod_{u=0}^{\beta-1} \prod_{j=1}^{s_k} \left(2\mathcal{T}_n(w_j(u)) - 2\cos\left(\frac{2\pi u}{\beta}\right)\right),$$

где $\mathcal{T}_s(w)$ — полином Чебышева первого рода, и числа $w_j(u)$ есть корни следующего уравнения

$$\sum_{i=1}^{k} (2\mathcal{T}_{s_i}(w) - 2) = 1 + 4\sum_{m=1}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi u \alpha_m}{\beta}\right),$$

для каждого $u = 0, 1, \ldots, \beta - 1$.

Благодарности

Авторы выражают благодарность рецензенту за тщательную проверку текста и полезные замечания.

Список литературы

1. *Kirchhoff G.* Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird // Ann. Phys. Chem. 1847. Bd. 72, N. 12. S. 497–508.

2. *Kel'mans A.K., Chelnokov V.M.* A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees // *J. Combin. Theory (B).* 1974. V. 16. P. 197–214.

3. *Mednykh A.D., Mednykh I.A.* Asymptotics and arithmetical properties of complexity for circulant graphs // *Dokl. Math.* 2018. V. 97, N. 2. 147–151.

4. *Grunwald L.A., Mednykh I.A.* The number of rooted forests in circulant graphs // *Ars Math. Contemp.* 2022. V. 22, N. 4. P 4–10.

5. *Kwon Y.S., Mednykh A.D., Mednykh I.A.* On the structure of Laplacian characteristic polynomial of circulant graphs. // *Dokl. Math.* 2024. V. 109, N. 1. P. 25–29.

6. *Knill O.* Cauchy–Binet for pseudo-determinants // *Linear Algebra Appl.* 2014. V. 459. P. 522–547.

7. *Chen X., Lin Q., Zhang F.* The number of spanning trees in odd valent circulant graphs // *Discrete Math.* 2004. V. 282. P. 69–79.

8. *Golin M.J., Yong X., Zhang Y.* The asymptotic number of spanning trees in circulant graphs // *Discrete Math.* 2010. V. 310. P. 792–803.

9. *Li M., Chen Z., Ruan X., Yong X.* The formulas for the number of spanning trees in circulant graphs // *Discrete Math.* 2015. V. 338. P. 1883–1906.

10. *Louis J.* A formula for the number of spanning trees in circulant graphs with non-fixed generators and discrete tori // *Bull. Aust. Math. Soc.* 2015. V. 92. P. 365–373.

11. *Zhang Y., Yong X., Golin M.J.* Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs // *Discrete Math.* 2005. V. 298. P. 334–364.

12. *Mednykh A., Mednykh I.* Complexity of circulant graphs with non-fixed jumps, its arithmetic properties and asymptotics // *Ars Math. Contemp.* 2023. V. 23, N. 1. P. 8–16.

13. *Yuanping Zhang, Xuerong Yong, Golin M.J.* The number of spanning trees in circulant graphs // *Discrete Math.* 2000. V. 223, N. 1-3. P. 337–350.

14. *Xiebin Chen, Qiuying Lin, Fuji Zhang* The number of spanning trees in odd valent circulant graphs // *Discrete Math.* 2004. V. 282, N. 1-3. P. 69–79.

15. *Mednykh A.D. Mednykh I.A.* The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic // *Discrete Math.* 2019. V. 342, N. 6. P. 1772–1781.

16. *Mason J.C., Handscomb D.C. Chebyshev Polynomials* / CRC Press. Boca Raton, 2003.

17. *Davis P.J. Circulant Matrices* // AMS Chelsea Publishing, 1994.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 94-112
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 94-112

18. *Lorenzini D.* Smith normal form and Laplacians // *J. Comb. Theory (B).* 2008. V. 98. P. 1271–1300.

References

1. *Kirchhoff G.* Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird // Ann. Phys. Chem. 1847. Bd. 72, N. 12. S. 497–508.

2. *Kel'mans A.K., Chelnokov V.M.* A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees // *J. Combin. Theory (B).* 1974. V. 16. P. 197–214.

3. *Mednykh A.D., Mednykh I.A.* Asymptotics and arithmetical properties of complexity for circulant graphs // *Dokl. Math.* 2018. V. 97, N. 2. 147–151.

4. *Grunwald L.A., Mednykh I.A.* The number of rooted forests in circulant graphs // *Ars Math. Contemp.* 2022. V. 22, N. 4. P 4–10.

5. *Kwon Y.S., Mednykh A.D., Mednykh I.A.* On the structure of Laplacian characteristic polynomial of circulant graphs. // *Dokl. Math.* 2024. V. 109, N. 1. P. 25–29.

6. *Knill O.* Cauchy–Binet for pseudo-determinants // *Linear Algebra Appl.* 2014. V. 459. P. 522–547.

7. *Chen X., Lin Q., Zhang F.* The number of spanning trees in odd valent circulant graphs // *Discrete Math.* 2004. V. 282. P. 69–79.

8. *Golin M.J., Yong X., Zhang Y.* The asymptotic number of spanning trees in circulant graphs // *Discrete Math.* 2010. V. 310. P. 792–803.

9. *Li M., Chen Z., Ruan X., Yong X.* The formulas for the number of spanning trees in circulant graphs // *Discrete Math.* 2015. V. 338. P. 1883–1906.

10. *Louis J.* A formula for the number of spanning trees in circulant graphs with non-fixed generators and discrete tori // *Bull. Aust. Math. Soc.* 2015. V. 92. P. 365–373.

11. *Zhang Y., Yong X., Golin M.J.* Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs // *Discrete Math.* 2005. V. 298. P. 334–364.

12. *Mednykh A., Mednykh I.* Complexity of circulant graphs with non-fixed jumps, its arithmetic properties and asymptotics // *Ars Math. Contemp.* 2023. V. 23, N. 1. P. 8–16.

13. *Yuanping Zhang, Xuerong Yong, Golin M.J.* The number of spanning trees in circulant graphs // *Discrete Math.* 2000. V. 223, N. 1-3. P. 337–350.

14. *Xiebin Chen, Qiuying Lin, Fuji Zhang* The number of spanning trees in odd valent circulant graphs // *Discrete Math.* 2004. V. 282, N. 1-3. P. 69–79.

15. *Mednykh A.D. Mednykh I.A.* The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic // *Discrete Math.* 2019. V. 342, N. 6. P. 1772–1781.

16. *Mason J.C., Handscomb D.C. Chebyshev Polynomials* / CRC Press. Boca Raton, 2003.

17. *Davis P.J. Circulant Matrices* // AMS Chelsea Publishing, 1994.

18. *Lorenzini D.* Smith normal form and Laplacians // *J. Comb. Theory (B).* 2008. V. 98. P. 1271–1300.

Информация об авторах

Александр Дмитриевич Медных, доктор физико-математических наук, профессор
SPIN-код: 9387-4204, AuthorID: 6310
Scopus Author ID 6603661547

Илья Александрович Медных, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
SPIN-код: 1303-3282, AuthorID: 559869
Scopus Author ID: 26644075000

Галина Константиновна Соколова, аспирант
SPIN-код: 7071-2529, AuthorID: 1014003

Author Information

Alexander D. Mednykh, Doctor of Mathematics, Professor
SPIN: 9387-4204, AuthorID: 6310
Scopus Author ID 6603661547

Ilya A. Mednykh, Candidate of Mathematics, senior researcher
SPIN: 1303-3282, AuthorID: 559869
Scopus Author ID: 26644075000

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 1, С. 94-112
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 1, P. 94-112

Galina K. Sokolova, Graduate student
SPIN-код: 7071-2529, AuthorID: 1014003

*Статья поступила в редакцию 14.01.2025;
одобрена после рецензирования 24.01.2025; принята к публикации 29.01.2025*

*The article was submitted 14.01.2025;
approved after reviewing 24.01.2025; accepted for publication 29.01.2025*